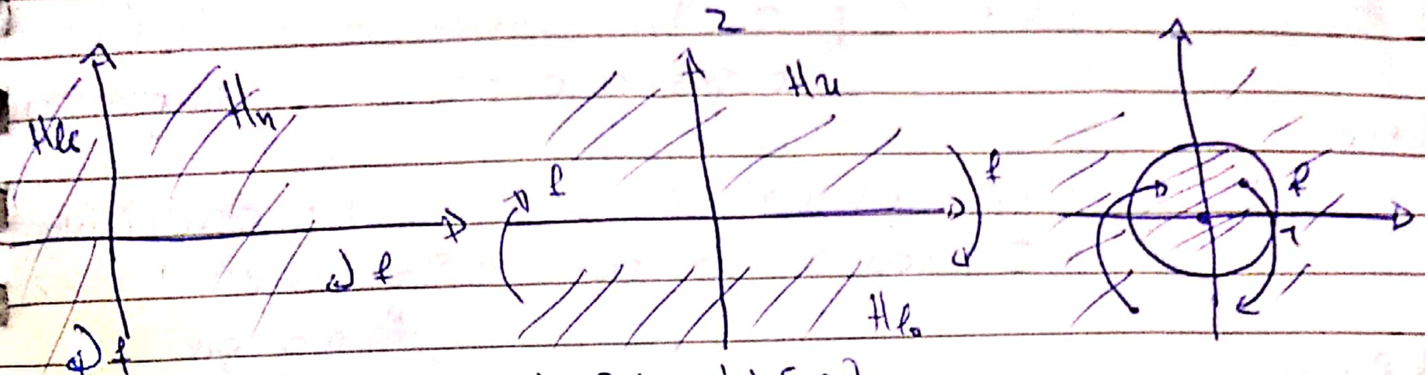
25/2/21

ΑΣ-7: $f: \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z}$, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$



(Εσωτερικά) $D(0,1)^*: D(0,1) \setminus \{0\}$
ο "τρύπιος" ανοικτός μοναδιαίος δίσκος = ο ανοικτός μοναδιαίος δίσκος χωρίς το 0

• Η εκθετική συνάρτηση $f(z) = e^z = \exp(z)$, $z \in \mathbb{C}$. Πώς ορίζεται; Ποια η σχέση της με την e^x, $x \in \mathbb{R}$?

Όπως θα δούμε πολύ πιο μετά: $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} z^k \right)$, $z \in \mathbb{C}$
Τώρα αυτό ακόμα δεν το γνωρίζουμε.

Θα ορίσουμε την e^z, $z \in \mathbb{C}$, θεωρώντας ότι γνωρίζουμε ήδη (δηλ. έχουμε ορίσει καλώς την e^x, $x \in \mathbb{R}$ και τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\sin x$, $\cos x$: $x \in \mathbb{R}$

Για φανταστικούς αριθμούς iy, $y \in \mathbb{R}$ ορίζουμε:
$e^{iy} := \cos y + i \sin y \in \mathbb{C}$ $\forall y \in \mathbb{R} \iff iy \in i\mathbb{R}$. Από τις ιδιότητες των $\cos, \sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ προκύπτει:
$e^{i0} = 1$, $e^{\pm i\pi/2} \underset{\text{πράξεις με μιγαδικούς εντός του εκθέτη επιτρέπονται}}{\left[= e^{i(\pm \pi/2)}\right]} = \pm i$, $e^{\pm i\pi} = -1$, $|e^{iy}| = 1, \forall y \in \mathbb{R}$

$|e^{iy}| = 1$, $\forall y \in \mathbb{R}$ [σημαίνει ότι το $e^{iy} \in \mathbb{C}$ βρίσκεται πάνω στον μιγαδικό κύκλο για κάθε $y \in \mathbb{R}$]

Επίσης, ισχύει: $\overline{e^{iy}} = \cos y - i\sin y = \cos(-y) + i\sin(-y) =$
$= e^{i(-y)} = e^{-iy}$

↑ πράξεις εντός του εκθέτη επιτρέπονται

και:

$e^{i(y+2k\pi)} = \cos(y+2k\pi) + i\sin(y+2k\pi) = \cos y + i\sin y =$
$= e^{iy} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ και ειδικότερα: $e^{i0} = 1 = e^{i2k\pi}, \forall k \in \mathbb{Z}$

βλ. πιο πριν

Ακόμα:

$\underbrace{e^{i(y_1+y_2)}}_{= e^{iy_1+iy_2}} = e^{iy_1} e^{iy_2}, \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$e^{i(y_1+y_2)} = e^{iy_1} e^{iy_2} \Rightarrow e^{i2y} = e^{i(y+y)} = e^{iy} e^{iy} =$
$= (e^{iy})^2 \Rightarrow e^{i3y} = e^{i(2y+y)} = e^{i2y} e^{iy} = (e^{iy})^2 e^{iy} =$
$= (e^{iy})^3 \Rightarrow \ldots$ (επαγωγή) $\ldots \Rightarrow e^{iny} = (e^{iy})^n, n \in \mathbb{N}$

και:

$e^{i0y} = 1 = (e^{iy})^0 \Rightarrow$ ισχύει και για $n=0$

Ακόμα:

$e^{i0} = e^{i(y-y)} = e^{iy+i(-y)} = e^{iy} \cdot e^{-iy} \Rightarrow e^{-iy} = \frac{1}{e^{iy}} =$

$= (e^{iy})^{-1}$ [δηλ. ο αντίστροφος του e^{iy} είναι ο e^{-iy}]

$\Rightarrow e^{+i(-n)y} = e^{-iny} = e^{-i(ny)} \overset{(*)}{=} \underbrace{(e^{iny})}_{(e^{iy})^n}{}^{-1} = (e^{iy})^{-n}$

↑ πράξεις ↑ εντός εκθέτη επιτρέπονται

(*) [από τη σχέση στο τέλος της προηγούμενης σελίδας]

Τελικά δηλ: $e^{iyn} = (e^{iy})^n, \; y \in \mathbb{R}, \; n \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \cos(ny) + i\sin(ny) = (\cos y + i\sin y)^n$ Τύπος de Moivre

preview: $\forall z = x+iy \in \mathbb{C}$ $[x, y \in \mathbb{R}]$: $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot \underbrace{e^{iy}}_{= \cos y + i\sin y}$

η συνάρτηση αυτή είναι η εκθετική συνάρτηση στο $\mathbb{C}$.